SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

GEOMETRÍA

Tema: Tronco de Pirámide y Cono

TRONCO DE PIRÁMIDE Y CONO

OBJETIVOS

1. CONOCER LAS RELACIONES ENTRE LOS VOLÚMENES Y SUPERFICIES DE DOS PIRÁMIDES Y CONOS SEMEJANTES.

2. CONOCER LA DEFINICIÓN Y CARACTERÍSTICAS DEL TRONCO DE PIRÁMIDE Y TRONCO DE CONO.

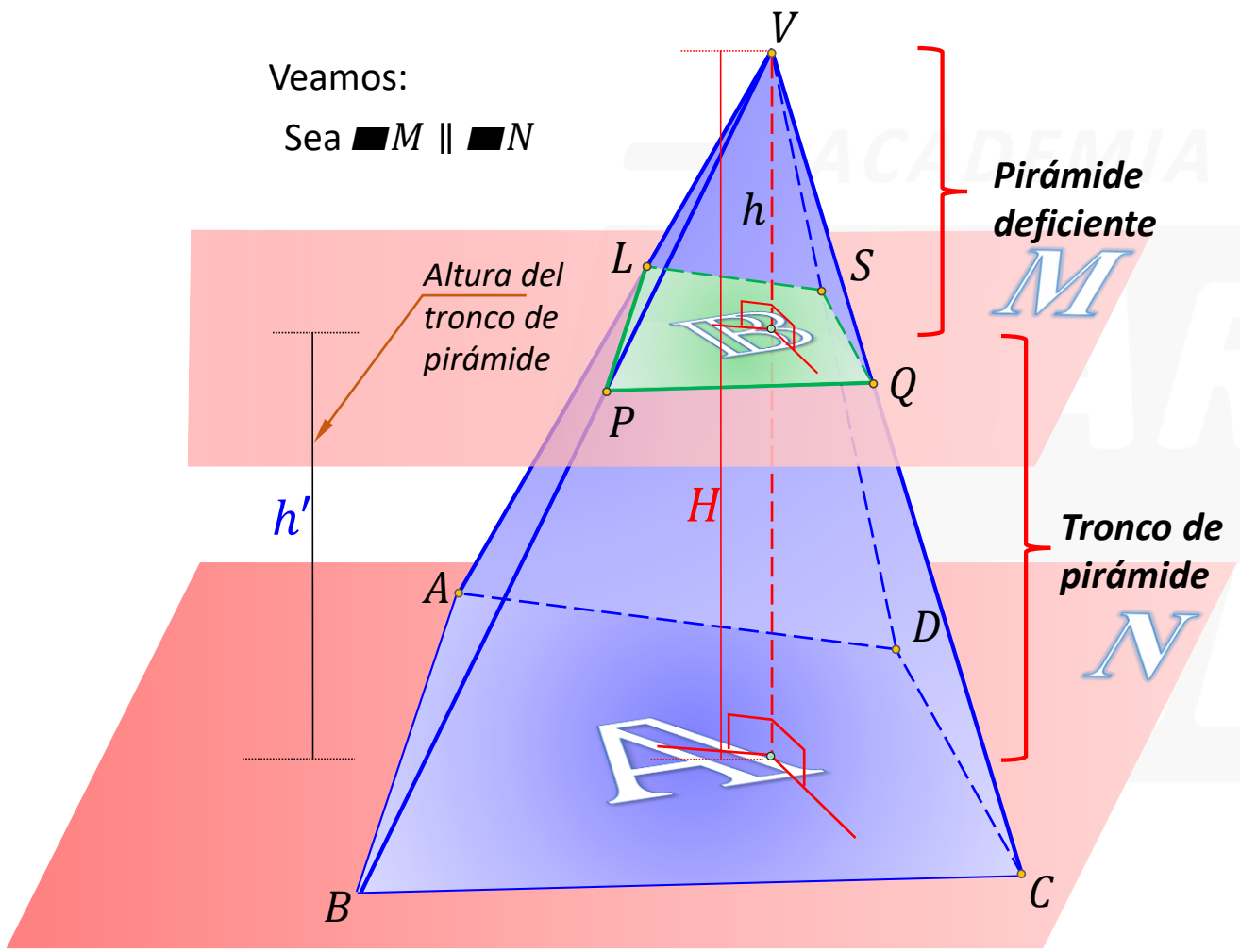
3. *RESOLVER PROBLEMAS TIPO EXAMEN DE ADMISION UNI.*

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

PIRÁMIDES SEMEJANTES

Veamos:

Sea ▰M ∥ ▰N



SE CUMPLE

- ***RAZÓN DE LÍNEAS:***

$$\frac{VL}{VA}=\frac{VQ}{VC}=\frac{PQ}{BC}=\frac{h}{H}=\cdots$$

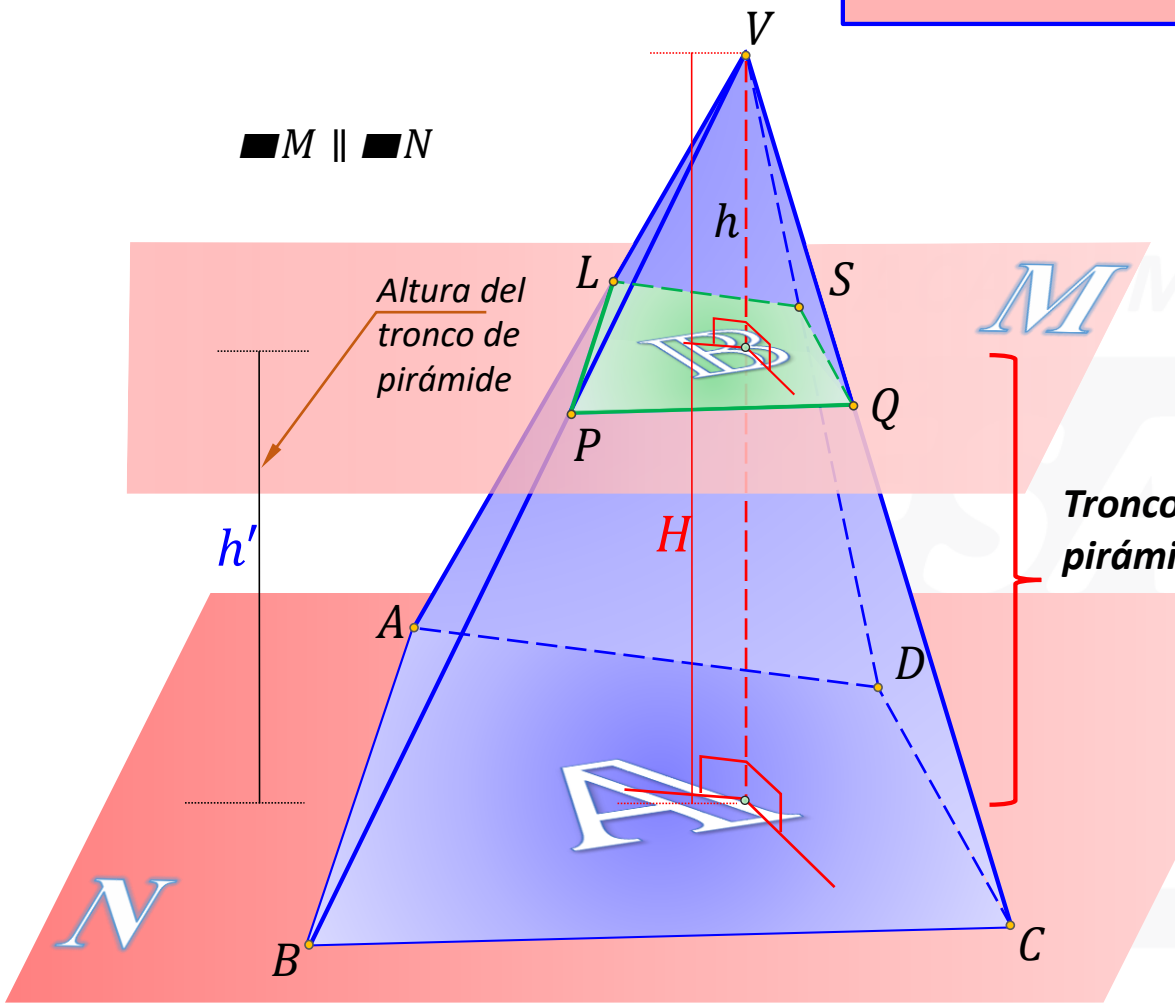
- ***RAZÓN DE ÁREAS:***

$$\frac{\mathbb{B}}{\mathbb{A}}=\left(\frac{VL}{VA}\right)^2=\left(\frac{VQ}{VC}\right)^2=\left(\frac{h}{H}\right)^2=\cdots$$

- ***RAZÓN DE VOLÚMENES:***

$$\frac{\mathbb{V}_{V-LPQS}}{\mathbb{V}_{V-ABCD}}=\left(\frac{PQ}{BC}\right)^3=\left(\frac{VQ}{VC}\right)^3=\cdots$$

PIRÁMIDES SEMEJANTES



$$\mathbb{V}_{\substack{tronco\ de\\ pirámide}} = \frac{h'}{3}\left(\mathbb{A} + \mathbb{B} + \sqrt{\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}}\right)$$

Comprobación:

- Notamos:

$$\mathbb{V}_{\substack{tronco\ de\\ pirámide}} = \underbrace{\mathbb{V}_{V-ABCD}}_{\frac{\mathbb{A}(h+h')}{3}} - \underbrace{\mathbb{V}_{V-LPQS}}_{\frac{\mathbb{B}(h)}{3}}$$

$$\mathbb{V}_{\substack{tronco\ de\\ pirámide}} = \frac{\mathbb{A}h'}{3} + \frac{h}{3}(\mathbb{A}-\mathbb{B}) \ldots (i)$$

- Por pirámides semejantes: $\dfrac{\mathbb{B}}{\mathbb{A}} = \left(\dfrac{h}{h+h'}\right)^2 \rightarrow h = \dfrac{\sqrt{\mathbb{B}}h'}{\left(\sqrt{\mathbb{A}}-\sqrt{\mathbb{B}}\right)}$

- Reemplazamos en (i):

$$\mathbb{V}_{\substack{tronco\ de\\ pirámide}} = \frac{\mathbb{A}h'}{3} + \frac{\sqrt{\mathbb{B}}h'}{3\left(\sqrt{\mathbb{A}}-\sqrt{\mathbb{B}}\right)}(\mathbb{A}-\mathbb{B}) \ldots (ii)$$

- Pero: $(\mathbb{A}-\mathbb{B}) = \left(\sqrt{\mathbb{A}}-\sqrt{\mathbb{B}}\right)\left(\sqrt{\mathbb{A}}+\sqrt{\mathbb{B}}\right)$

- Reemplazamos en (ii):

$$\therefore \mathbb{V}_{\substack{tronco\ de\\ pirámide}} = \frac{h'}{3}\left(\mathbb{A} + \mathbb{B} + \sqrt{\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}}\right)$$

TRONCO DE PIRÁMIDE

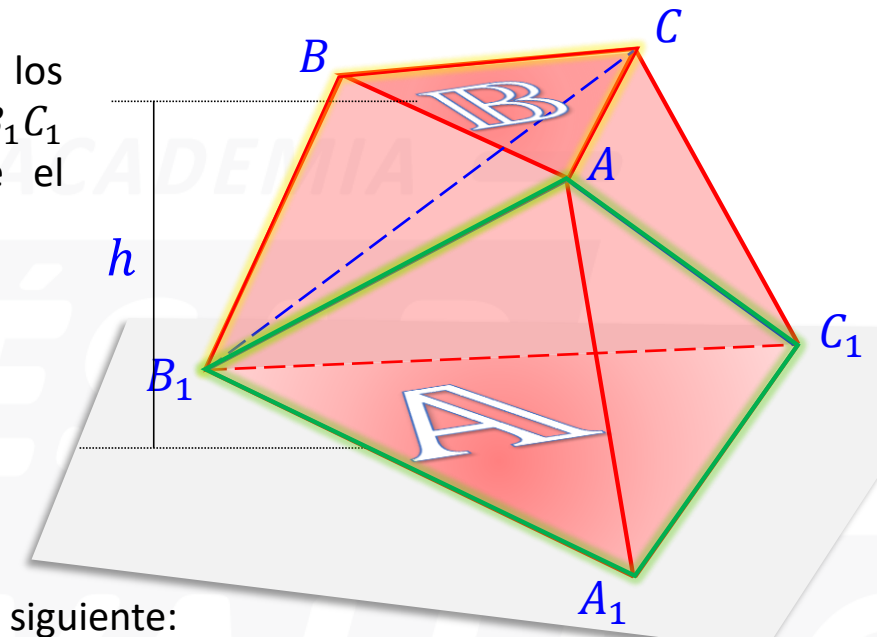
EXAMEN UNI

En un tronco de pirámide $ABC - A_1B_1C_1$, los volúmenes de las pirámides $B_1 - ABC$ y $A - A_1B_1C_1$ miden $\mathbb{V}_1$ y $\mathbb{V}_2$ respectivamente. Determine el volumen de la pirámide $A - CB_1C_1$.

$A)\ \sqrt{V_1V_2}$ $\quad B)\ \dfrac{V_1V_2}{V_1+V_2}$ $\quad C)\ \dfrac{2V_1V_2}{V_1+V_2}$

$D)\ 2\sqrt{V_1V_2}$ $\quad E)\ 3\sqrt{V_1V_2}$

Piden $\mathbb{V}_{A-CB_1C_1} = \mathbb{V}_X$



DATOS:

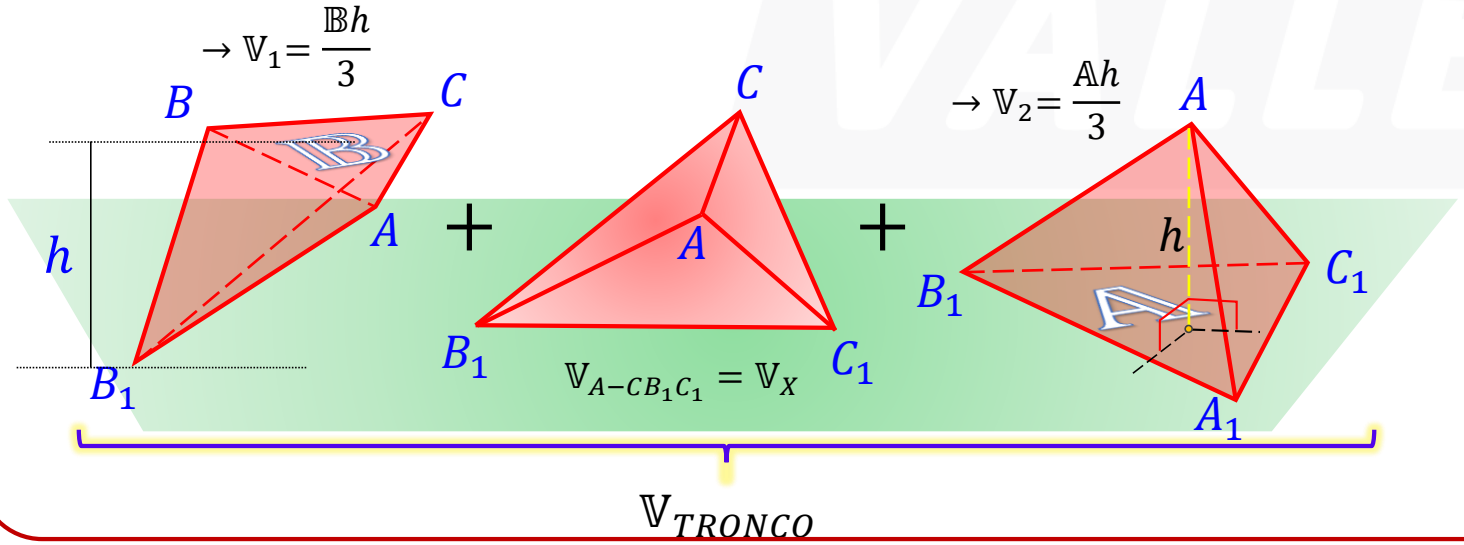
- ✓ $\mathbb{V}_{B_1-ABC} = \mathbb{V}_1$
- ✓ $\mathbb{V}_{A-A_1B_1C_1} = \mathbb{V}_2$

- Por volumen del tronco de pirámide:

$$\mathbb{V}_{\substack{\textbf{tronco de}\\ \textbf{pirámide}}} = \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{3}}\left(\mathbb{A} + \mathbb{B} + \sqrt{\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}}\right)$$

$$\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_X + \mathbb{V}_2 = \frac{\boldsymbol{h}\mathbb{A}}{\boldsymbol{3}} + \frac{\boldsymbol{h}\mathbb{B}}{\boldsymbol{3}} + \frac{\boldsymbol{h}\sqrt{\mathbb{A}\mathbb{B}}}{\boldsymbol{3}}$$

- Veamos los sólidos por separado y tenemos lo siguiente:



$$\rightarrow \mathbb{V}_x = \frac{h\sqrt{\mathbb{A}\mathbb{B}}}{3} = \sqrt{\frac{\mathbb{A}h}{3}}\sqrt{\frac{\mathbb{B}h}{3}}$$

$\mathbb{V}_2$ $\quad$ $\mathbb{V}_1$

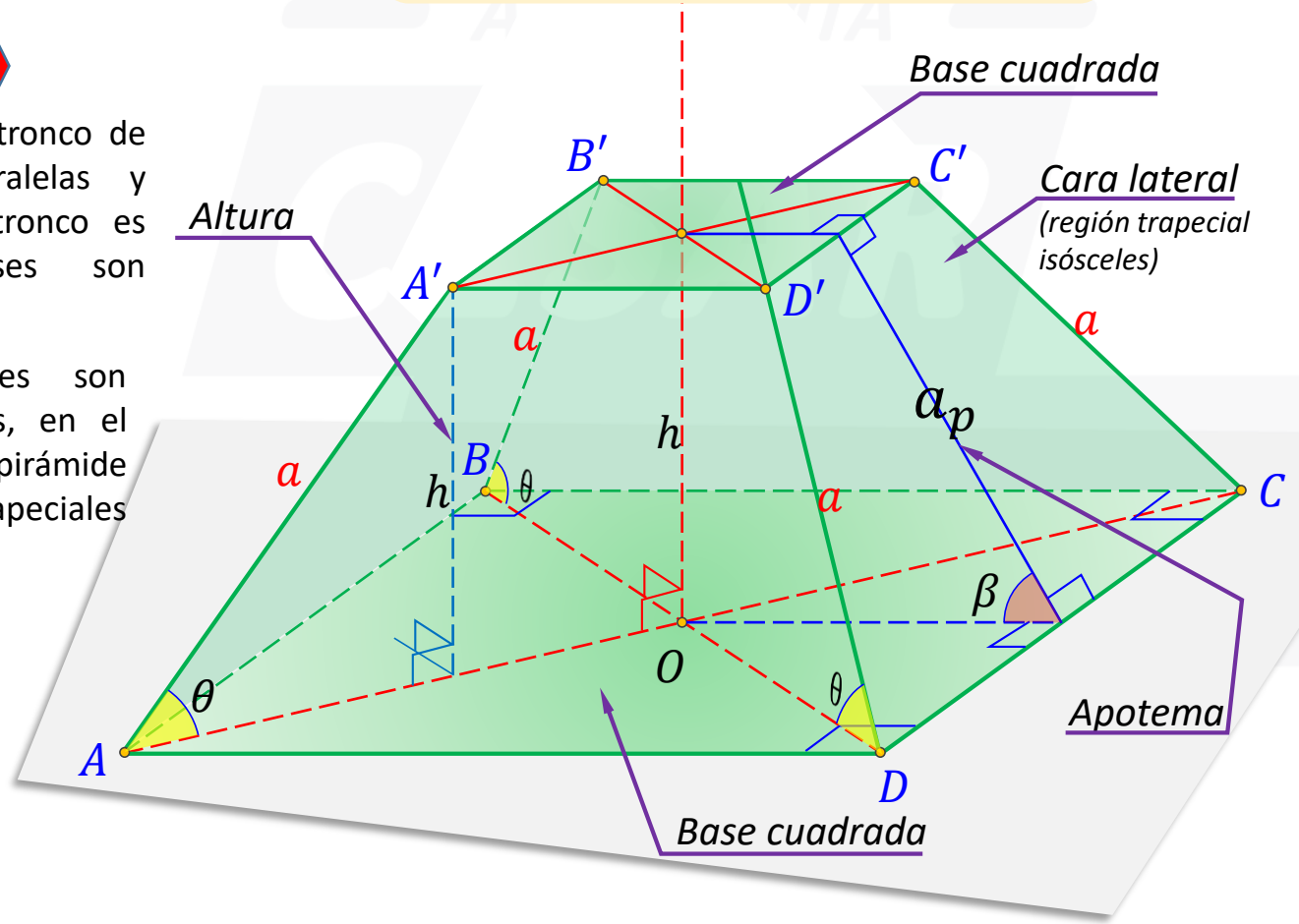
$$\therefore \mathbb{V}_x = \sqrt{\mathbb{V}_1\mathbb{V}_2}$$

Clave A

TRONCO DE PIRÁMIDE REGULAR

Es aquel tronco de pirámide generado a partir de una pirámide regular.

❑ ***$A'B'C'D - ABCD$ es un tronco de pirámide cuadrangular regular***



características

- Las bases en todo tronco de pirámide son paralelas y semejantes, si el tronco es regular, las bases son regulares.
- Las caras laterales son regiones trapeciales, en el caso del tronco de pirámide regular son trapeciales isósceles.

Del gráfico:

θ: medida del ángulo entre la arista lateral y la base.

β: medida del diedro entre la cara lateral y la base.

✓ ***Cálculo del área de la superficie lateral***

$$\mathbb{A}_{S.L} = \left(\mathbb{A}_{\substack{1\ cara\\ lateral}}\right)\left(n^{\circ}{}_{\substack{lados\ de\\ la\ base}}\right)$$

TRONCO DE PIRÁMIDE REGULAR

EXAMEN UNI

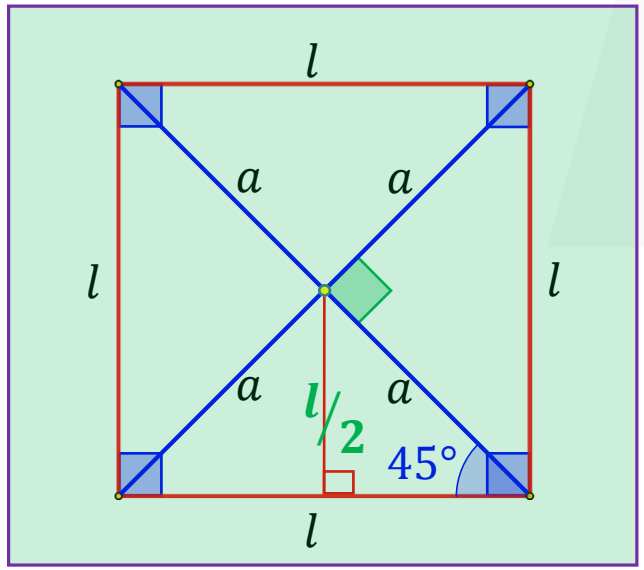
En un tronco de pirámide cuadrangular regular, las aristas básicas son 2 cm y 6 cm, la apotema del tronco mide 4 cm. Calcule el volumen del tronco (en cm^3).

$A)\ \frac{52\sqrt{3}}{3}$ $B)\ \frac{78\sqrt{3}}{3}$ $C)\ \frac{104\sqrt{3}}{3}$

$D)\ \frac{130\sqrt{3}}{3}$ $E)\ \frac{156\sqrt{3}}{3}$

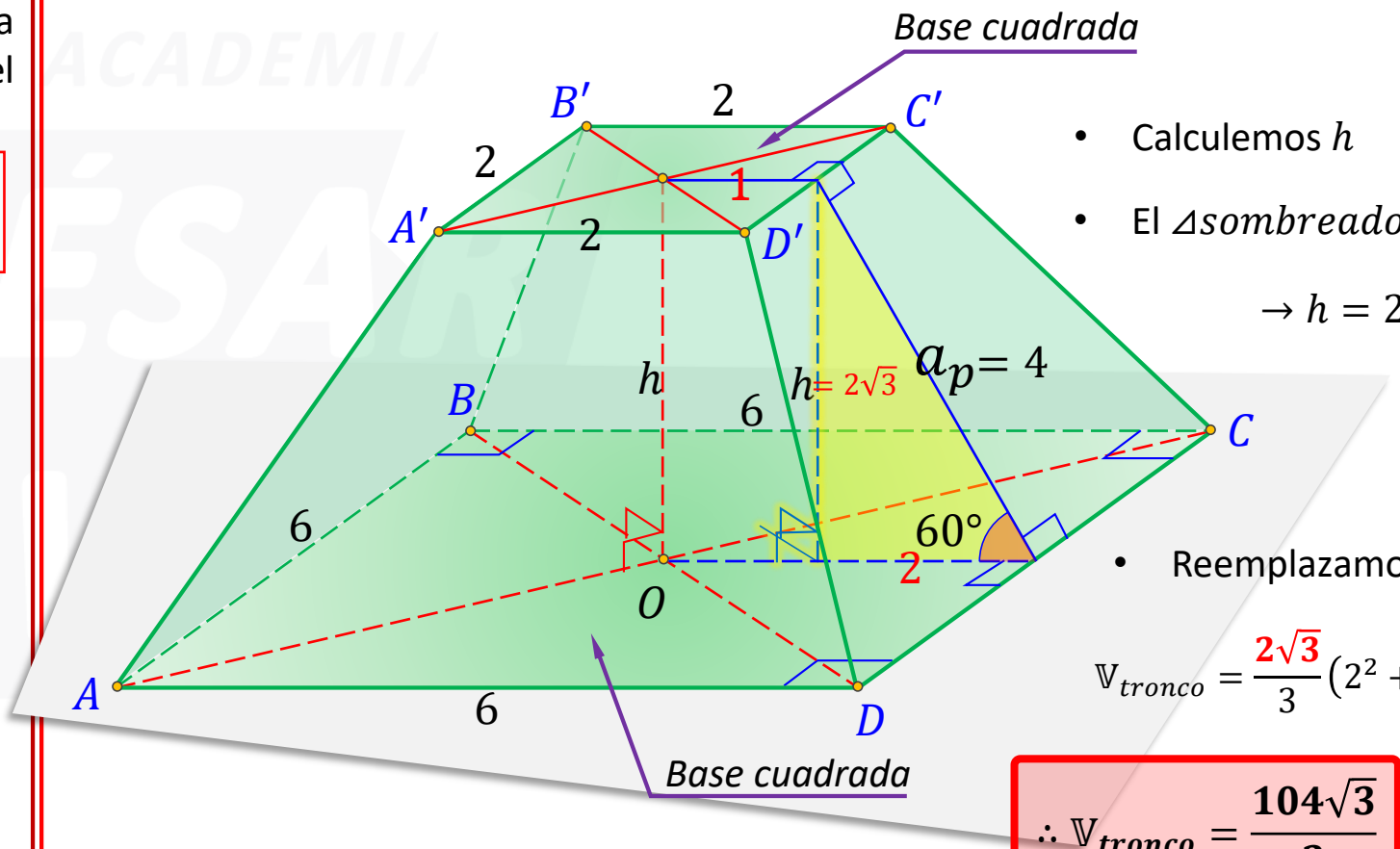
RECUERDA:

CUADRADO



Piden $\mathbb{V}_{TRONCO}$

- Se observa que: $\mathbb{V}_{tronco} = \frac{h}{3}\left(2^2 + 6^2 + \sqrt{4 \cdot 36}\right) \ldots (i)$



- Calculemos h
- El $\measuredangle sombreado$ es de 60°

$\rightarrow h = 2\sqrt{3}$

- Reemplazamos en (i):

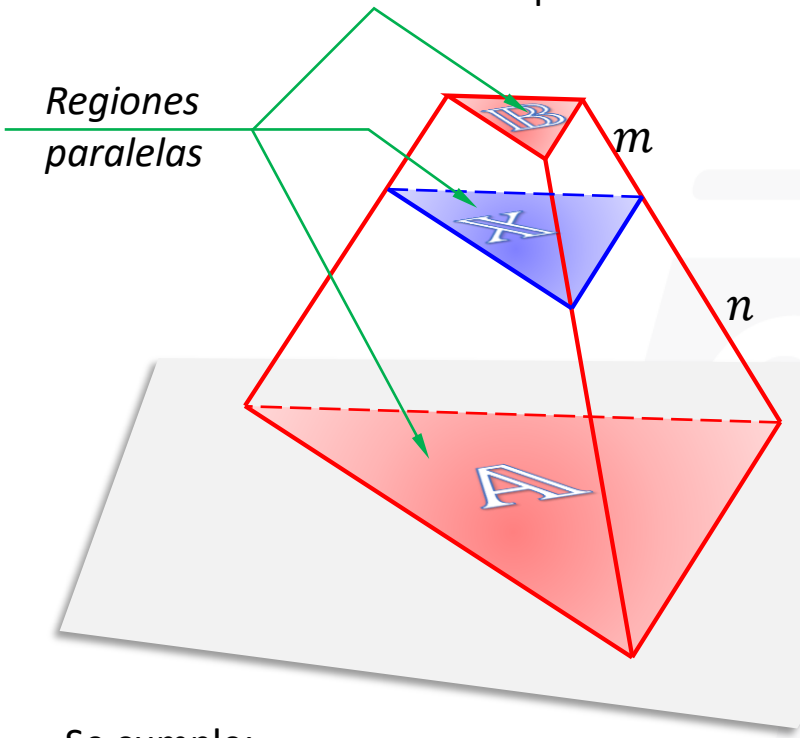
$$\mathbb{V}_{tronco} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(2^2 + 6^2 + \sqrt{4 \cdot 36}\right)$$

$$\therefore \mathbb{V}_{tronco} = \frac{104\sqrt{3}}{3}$$

Clave C

TEOREMAS ADICIONALES

❑ Se muestra un tronco de pirámide



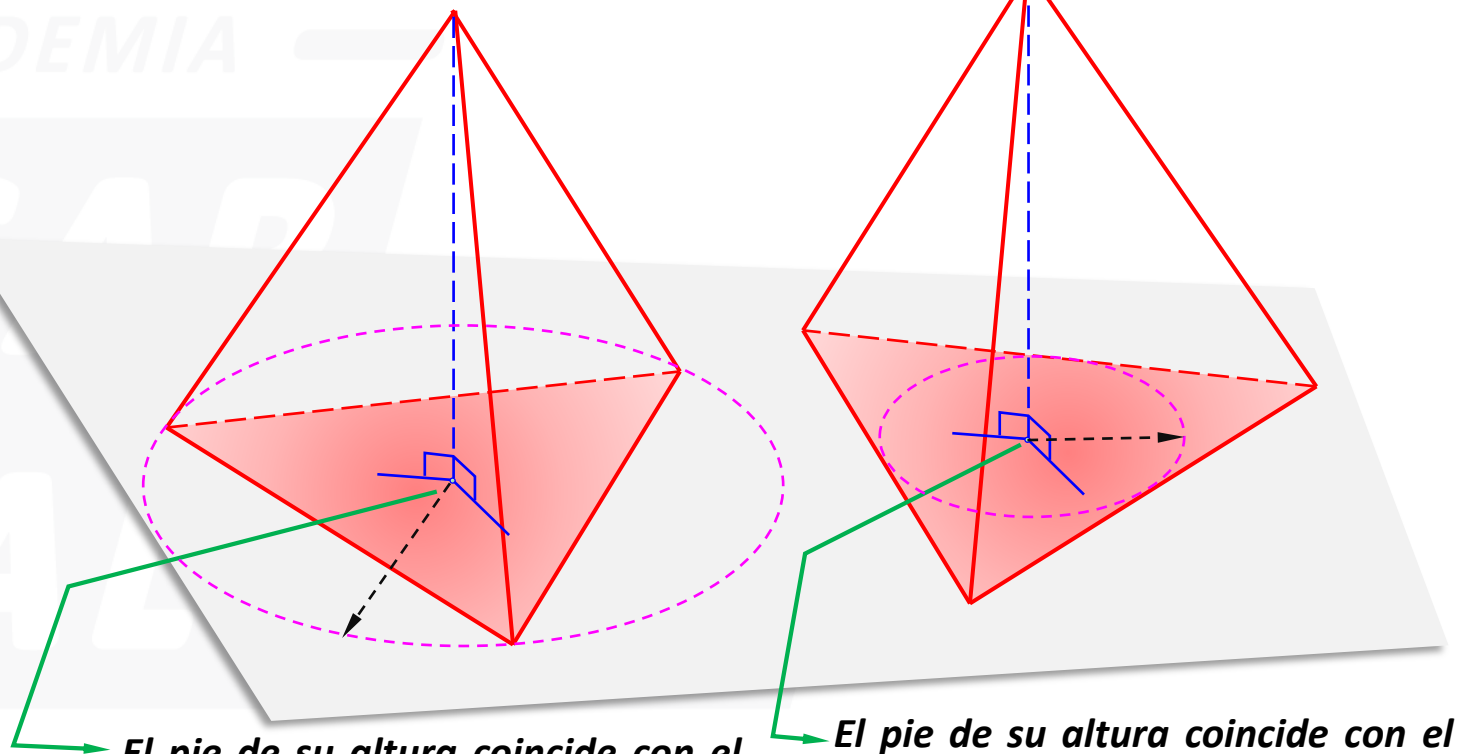
Se cumple:

$$\mathbb{X} = \left(\frac{m\sqrt{\mathbb{A}} + n\sqrt{\mathbb{B}}}{m+n} \right)^2$$

NOTA:

El teorema se cumple para un tronco de pirámide de cualquier base

❑ Si el vértice de una pirámide, equidista de los vértices de su base, se cumple:



El pie de su altura coincide con el centro de la circunferencia circunscrita a la base

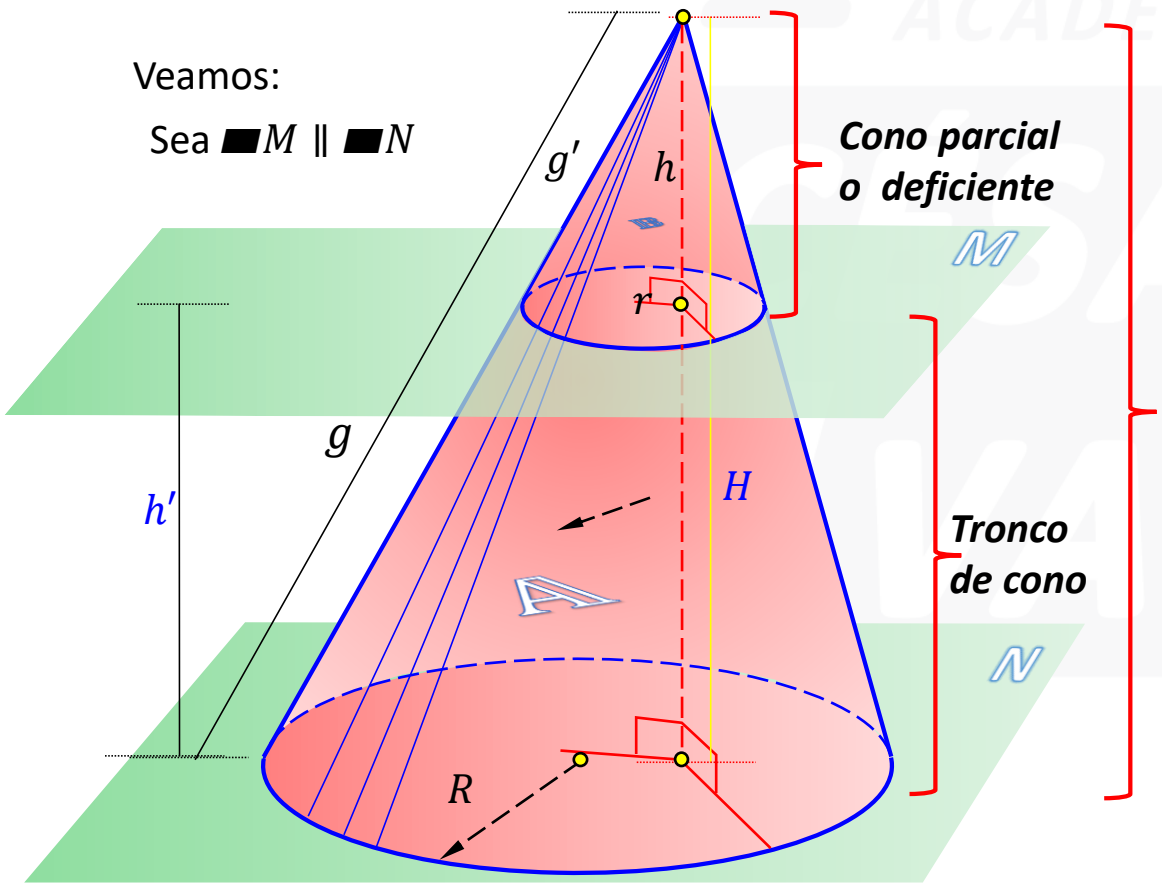
❑ Si el vértice de una pirámide, equidista de las aristas básicas, se cumple:

El pie de su altura coincide con el centro de la circunferencia inscrita en la base

NOTA:

Los teoremas se cumple para pirámides de cualquier base

CONOS SEMEJANTES



SE CUMPLE

- ***RAZÓN DE LÍNEAS:*** $\frac{g'}{g} = \frac{r}{R} = \frac{h}{H} = \cdots$
- ***RAZÓN DE ÁREAS:*** $\frac{\mathbb{B}}{\mathbb{A}} = \left(\frac{g'}{g}\right)^2 = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \cdots$
- ***RAZÓN DE VOLÚMENES:*** $\frac{\mathbb{V}_{V-LPQS}}{\mathbb{V}_{V-ABCD}} = \left(\frac{r}{R}\right)^3 = \left(\frac{h}{H}\right)^3 = \cdots$

➢ Para el tronco de cono, el volumen se calcula:

$$\mathbb{V}_{\substack{tronco\ de\\ cono}} = \frac{h'}{3}\left(\mathbb{A} + \mathbb{B} + \sqrt{\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}}\right)$$

CONO DE REVOLUCIÓN

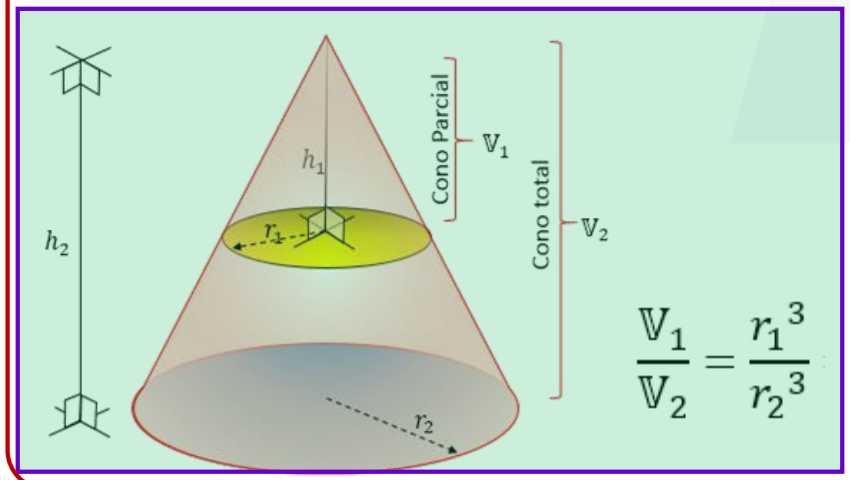
EXAMEN UNI

Un cilindro de revolución está inscrito en un cono de revolución, de modo que una de las bases del cilindro está sobre la base del cono. Si el volumen del cono es $18m^3$, calcule el volumen del cono parcial determinado (en m^3), sabiendo que el volumen del cilindro es 3/7 del volumen del tronco de cono.

$A)\ 3/4$ $B)\ 5/4$ $C)\ 7/4$

$D)\ 9/4$ $E)\ 11/4$

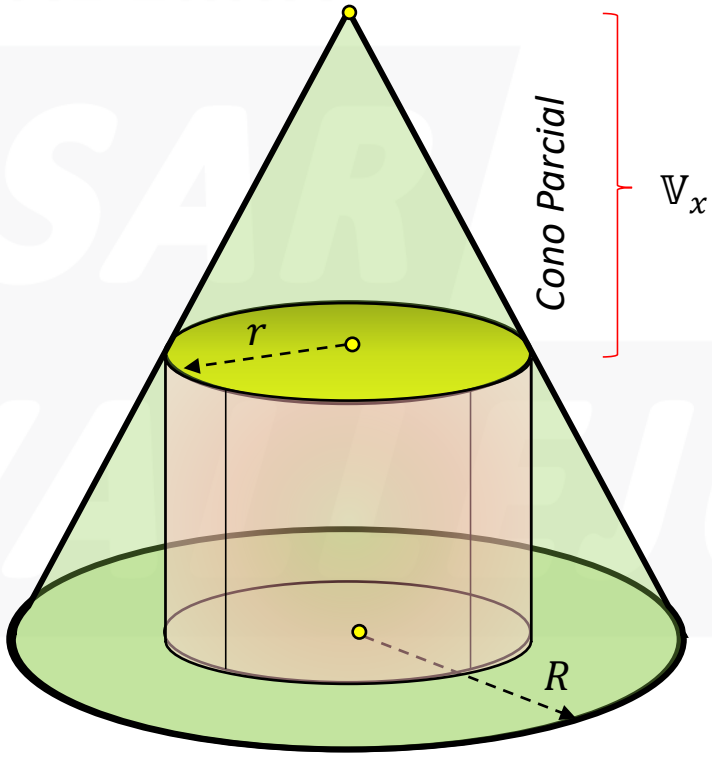
TEOREMA



$$\frac{\mathbb{V}_1}{\mathbb{V}_2} = \frac{{r_1}^3}{{r_2}^3}$$

Piden $\mathbb{V}_X$= Volumen del cono parcial

$\mathbb{V}_{Cono\ Total} = 18m^3$



Dato:

$$\mathbb{V}_{Cilindro} = \frac{3}{7}\mathbb{V}_{Tronco\ de\ cono}$$

Reemplazando las formulas:

$$\pi r^2 h = \frac{3}{7}\frac{h\pi}{3}(r^2 + R^2 + Rr)$$

$$7r^2 = R^2 + r^2 + Rr$$

Resolvemos la cuadrática:

$$R^2 + Rr - 6r^2 = 0$$

$R \rightarrow 3r$

$R \rightarrow -2r$

$$\Rightarrow R = 2r$$

De la semejanza de los conos:

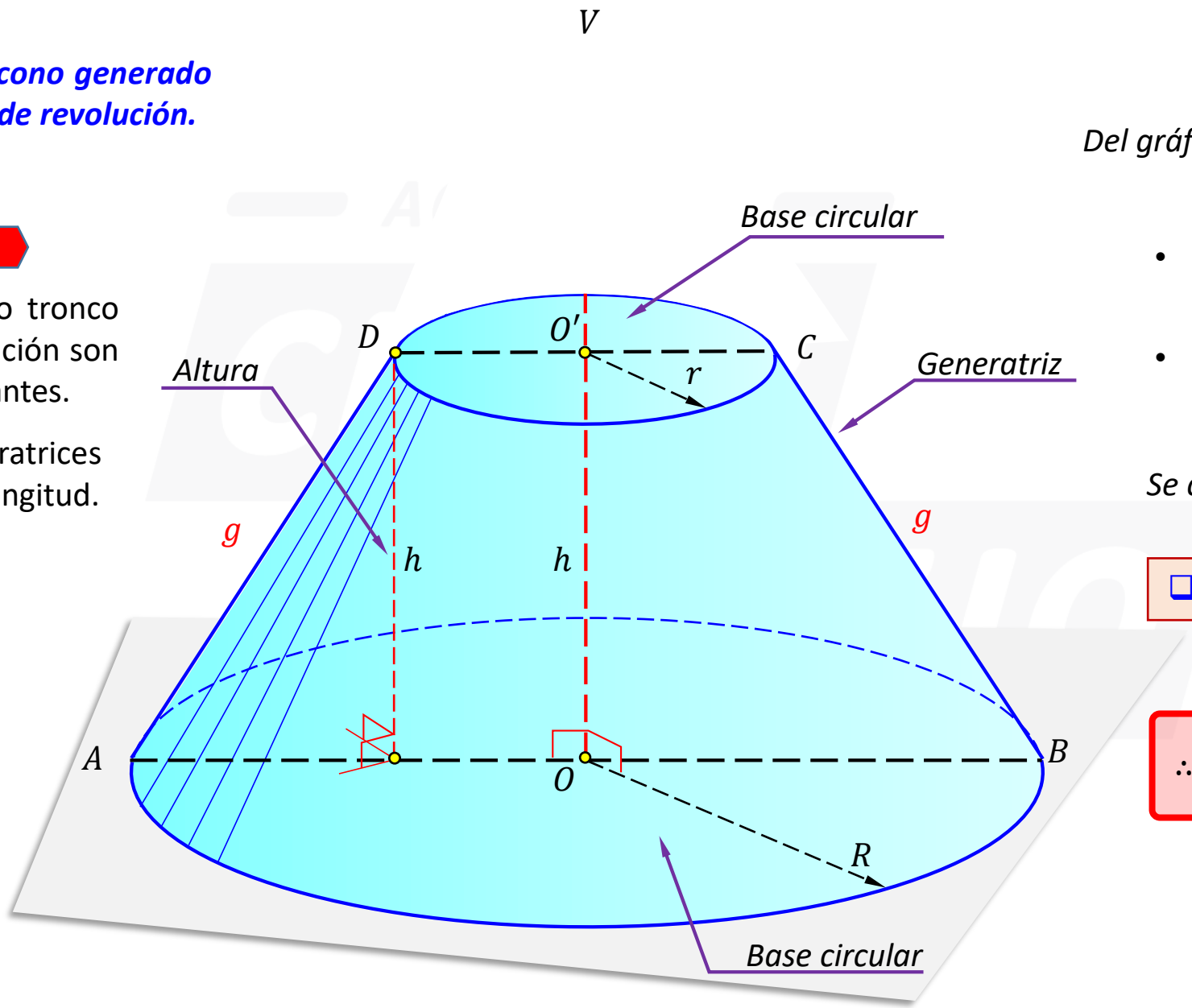
$$\frac{\mathbb{V}_x}{\mathbb{V}_{cono\ total}} = \frac{r^3}{(2r)^3} \rightarrow \frac{\mathbb{V}_x}{18} = \frac{1}{8}$$

$\therefore \mathbb{V}_X = 9/4$

Clave D

TRONCO DE CONO DE REVOLUCIÓN

Es aquel tronco de cono generado a partir de un cono de revolución.



características

- Las bases en todo tronco de cono de revolución son paralelas y semejantes.
- Todas las generatrices tienen la misma longitud.

Del gráfico:

- O *y* O': *Centros de las bases*
- $ABCD$: *Sección axial*

Se cumple:

❑ ***Volumen***

$$\therefore \mathbb{V}_{\substack{tronco\\de\ cono}} = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + R \cdot r\right)$$

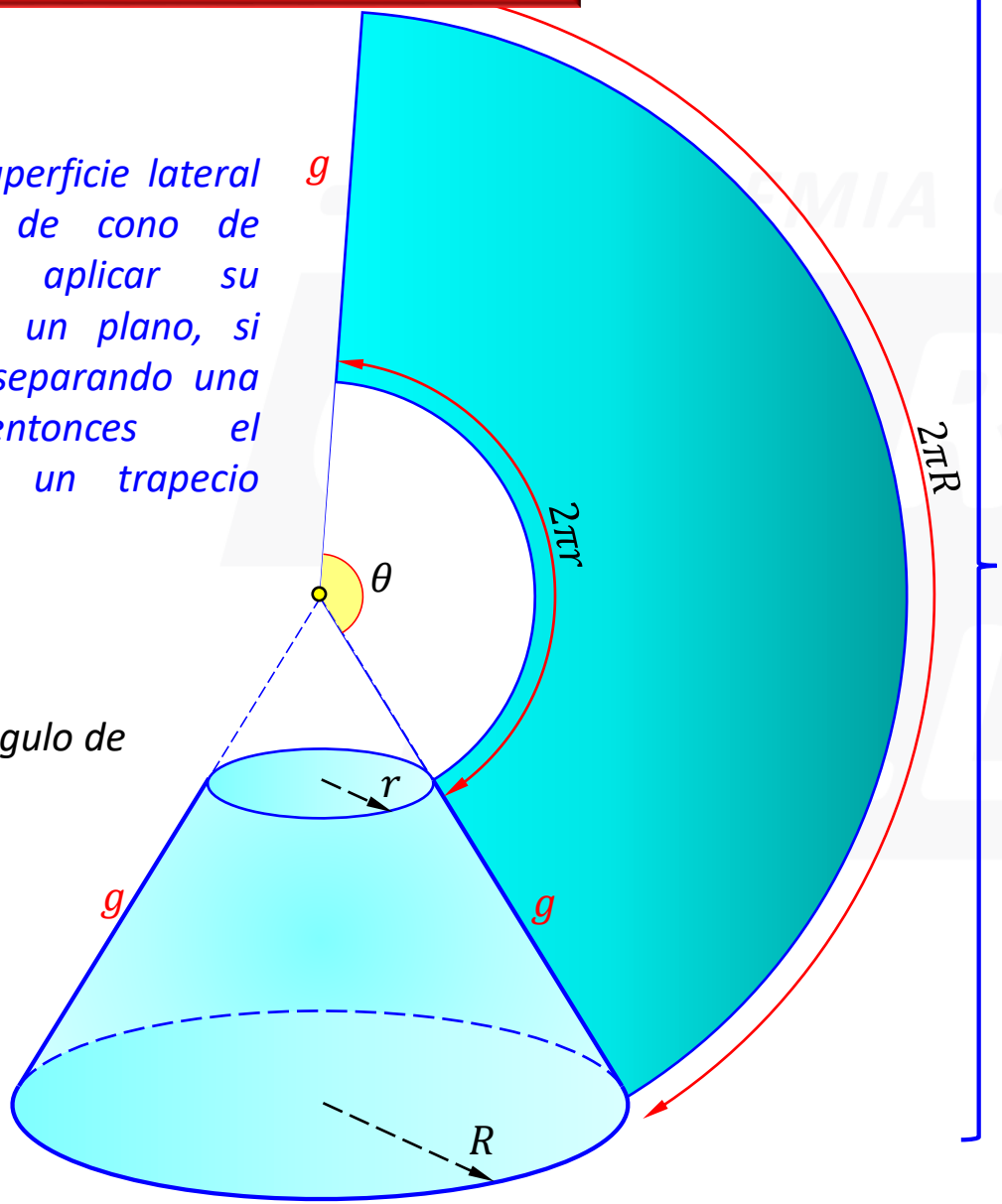
TRONCO DE CONO DE REVOLUCIÓN

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL

Desarrollar la superficie lateral de un tronco de cono de revolución es aplicar su superficie sobre un plano, si esto se realiza separando una generatriz, entonces el desarrollo será un trapecio circular.

Del gráfico:

θ: *Medida del ángulo de desarrollo*



Se cumple:

❑ ***Área de la superficie lateral***

$$\mathbb{A}_{S.L} = \mathbb{A}_{trapecio\ circular}$$

$$\mathbb{A}_{S.L} = \pi(R+r)g$$

❑ ***Área de la superficie total***

$$\mathbb{A}_{S.T} = \underbrace{\mathbb{A}_{S.L}}_{\pi(R+r)g} + \underbrace{\mathbb{A}_{base\ 1}}_{\pi R^2} + \underbrace{\mathbb{A}_{base\ 2}}_{\pi r^2}$$

$$\mathbb{A}_{S.T} = \pi(R+r)g + \pi(R^2+r^2)$$

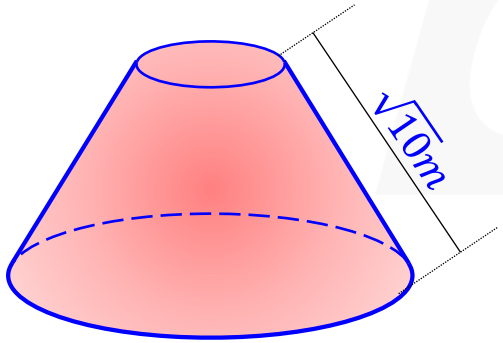
❑ ***Cálculo de la medida del ángulo de desarrollo***

$$\theta = 360^\circ\left(\frac{R-r}{g}\right)$$

TRONCO DE CONO DE REVOLUCIÓN

EXAMEN UNI

En la panamericana cerca de Casma se ha formado una duna en forma de tronco de cono de revolución. Las longitudes de las circunferencias son $4\pi m$ y $2\pi m$. Ver figura. Halle el volumen de la duna en metros cúbicos.

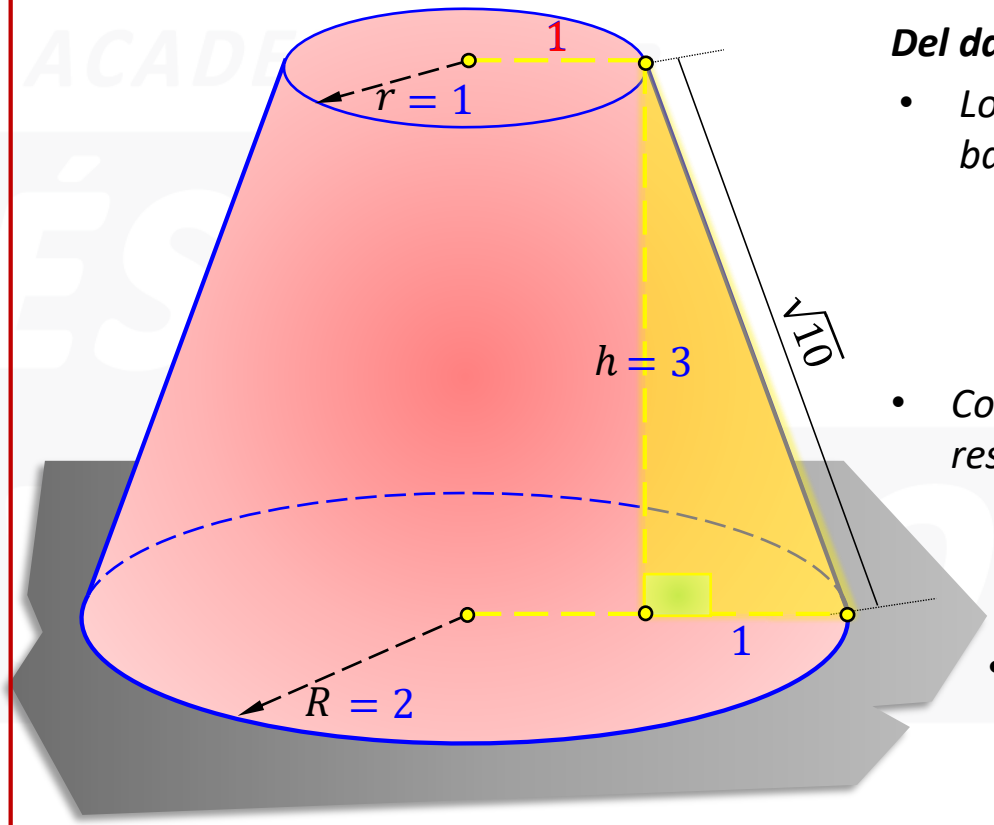


$A)\ 3\pi$ $B)\ 5\pi$ $C)\ 7\pi$

$D)\ 10\pi$ $E)\ 11\pi$

Resolución:

Piden $\mathbb{V}_{TRONCO} = \dfrac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + R \cdot r\right) \ldots (i)$



Del dato:

- *Longitudes de las circunferencias de las bases:*

$$2\pi r = 2\pi \rightarrow r = 1$$

$$2\pi R = 4\pi \rightarrow R = 2$$

- *Con ello en el triángulo rectángulo resaltado:*

$$h^2 + 1^2 = \sqrt{10}^2$$

$$\rightarrow h = 3$$

- *Reemplazamos en r, R, h en (i):*

$$\mathbb{V}_{TRONCO} = \frac{\pi 3}{3}\left(2^2 + 1^2 + 2 \cdot 1\right)$$

$$\therefore \mathbb{V}_{tronco} = 7\pi$$

Clave C

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe